1.5.5 Důkazy dělitelnosti I

Předpoklady: 010504

Pedagogická poznámka: V následujících příkladech se často pracuje s neznámými, což je pro žáky velký nezvyk. Je proto třeba být připraven brzo postrkávat u tabule.

Př. 1: Je dán součin libovolných dvou po sobě jdoucích přirozených čísel $n(n+1)$. Rozhodni, zda je nebo není dělitelný 2.

Součin je určitě dělitelný 2, alespoň jedno z čísel v součinu je sudé a pak je určitě sudý celý součin.

Příklad můžeme řešit i podrobněji.
Čísla je možné pomocí dvojky zapsat dvěma způsoby $n=2k$ nebo $n=2k+1$.

- $n=2k$, $n+1=2k+1$ (první je sudé, druhé liché)
  potom $n(n+1)=2k(2k+1)=2\cdot k(2k+1)$ - dělitelné dvěma
- $n=2k+1$, $n+1=2k+2$ (první je liché, druhé sudé)
  potom $n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2\cdot(2k+1)(k+1)$ - dělitelné dvěma

Pedagogická poznámka: Žáci už sice za sebou mají hodinu dosazování do vzorce, ale nejsou v tom příliš obratní, proto následující příklady.

Př. 2: Rozhodni, zda je součin libovolných tří po sobě jdoucích přirozených čísel určitě dělitelný čísly 2, 3 a 4.

Stejná úvaha jako v předchozím případě.
Tři po sobě jdoucí čísla $\Rightarrow$

- minimálně jedno je dělitelné dvěma $\Rightarrow$ součin je dělitelný dvěma,
- minimálně jedno je dělitelné třemi $\Rightarrow$ součin je dělitelný třemi,
- ani jedno nemusí být dělitelné čtyřmi a nemusí být dvě z nich dělitelné dvěma $\Rightarrow$ součin nemusí být dělitelný čtyřmi.

Př. 3: Zobecni výsledky dvou předchozích příkladů.

Hledáme zobecnění = hledáme větu, která bude v sobě obsahovat oba předchozí výroky.
Zobecnění: Součin *n* po sobě jdoucích přirozených čísel je určitě dělitelný číslem *n* (a všemi přirozenými čísly menšími než *n*).

Př. 4: Dokaž podrobněji, že součin libovolných tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi.

Součin tří po sobě jdoucích čísel: $n(n+1)(n+2)$.
Tři možnosti:

- $n=3k$: $n+1=3k+1$, $n+2=3k+2$
  $n(n+1)(n+2)=3\cdot k(3k+1)(3k+2)$

- $n=3k+1$: $n+1=3k+1+1=3k+2$, $n+2=3k+1+2=3k+3$
  $n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)=(3k+1)(3k+2)(k+1)\cdot 3$
- $n=3k+2$: $n+1=3k+2+1=3k+3$, $n+2=3k+2+2=3k+4$
  $n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=(3k+2)\cdot 3(k+1)(3k+4)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad nemusí dokončit během hodiny všichni, ale všichni by se měli dostat minimálně do první třetiny, aby za případné asistence provedli dosazení.

Př. 5: Zjisti, jakým největším přirozeným číslem je určitě dělitelný součin libovolných čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel.

Máme součin $n(n+1)(n+2)(n+3)$.
Minimálně jedno z čísel je dělitelné 4, minimálně jedno je dělitelné 3, a minimálně jedno je dělitelné 2 a není dělitelné 4 (dělitelné dvěma jsou dvě z čísel, jedno pouze dvěma druhé i čtyřmi).
Součin je najednou dělitelný čísly 2, 3 a 4 $\Rightarrow$ největší dělitel je číslo $2\cdot 3\cdot 4=24$.

Př. 6: Zjisti, zda platí, že součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi.

Zkusíme: $1+2+3=6$ - dělitelné třemi, ale není to důkaz.
Označíme čísla $\Rightarrow$ n, $n+1$, $n+2$.
$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ $\Rightarrow$ číslo je dělitelné třemi.

Př. 7: Zjisti, zda součet čtyř po sobě jdoucích čísel je dělitelný čtyřmi.

Zkusíme: 1+2+3+4=10 - není to dělitelné čtyřmi $\Rightarrow$ nemá cenu nic dokazovat, jasně to neplatí.
Přesto to zkusíme, abychom viděli, jak to je.
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=4n+4+2=4(n+1)+2$ $\Rightarrow$ součet nebude nikdy dělitelný čtyřmi.

Př. 8: Rozhodni, zda je pravdivý následující výrok: „Součet *n* po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem *n*“.

Výrok je nepravdivý, protože neplatí pro $n=4$.

Př. 9: (Příhoda doc. Caldy) V původních vozech pražského metra byly čtyři kratší a šest delších lavic na sezení. Na jedné z kratších lavic seděl doc. Calda s neznámým cizím pánem. Na jedné ze stranic přistoupila korpulentní paní a se slovy „Tohle je pro tři“ rozhrnula oba pány na stranu a sedla si mezi ně. Po chvíli si doc. Calda na popisce všimnul, že vagón má 44 míst k sezení, a ihned ho napadlo, jak paní dokázat, že kratší lavice je ve skutečnosti pouze pro dva cestující. Proveď jeho důkaz.

Předpokládejme, že kratší lavice je pro tři cestující $\Rightarrow$ počet cestujících ve vagónu:
- na kratších lavicích: $4\cdot 3=12$,
- na delších lavicích: $6\cdot k$ (*k* je počet cestujících, pro který je určena delší lavice).

Celkový počet cestujících ve vagónu: $44 = 12 + 6k \Rightarrow 32 = 6k$ - tato podmínka nemůže být nikdy splněna, protože nelze nalézt celé číslo *k*, pro které by platilo $32 = 6k$.
Pokud je kratší lavice pro dva cestující, platí: $44 = 4 \cdot 2 + 6k \Rightarrow 36 = 6k \Rightarrow k = 6 \Rightarrow$ delší lavice je určena pro šest cestujících.

Pedagogická poznámka: Dá se očekávat spíše konkrétní řešení než obecný přístup pomocí *k*.

Shrnutí: Součin *n* po sobě jdoucích čísel je určitě dělitelný číslem *n* (pro součet to neplatí).